Rescatemos algunos conceptos de Álgebra

$\mathbb{V}$: espacio vectorial complejo

Producto interno en $\mathbb{V}$:

Es una función: $\langle \, , \, \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{C}$ tal que:

i) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

ii) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$

iii) $\langle u, u \rangle \geq 0$

iv) $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

para todo $u, v, w \in \mathbb{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Norma inducida por un p.i:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Verifica:
- $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0 \iff u = 0$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
- $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$

Distancia entre vectores u y v

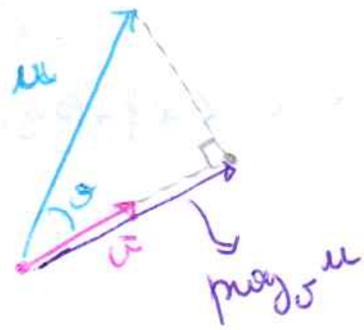
$$\|u - v\|$$

Vectores ortogonales: $\langle u, v \rangle = 0$

↳ con respecto a un p.i.

En $\mathbb{R}^n$: $\langle u, v \rangle = \|u\| . \|v\| . \cos\theta$

Si $\|v\| = 1$: $\langle u, v \rangle = \|u\| \cos\theta$



$$\text{proy}_v u = \|u\| \cos\theta . \bar{v}$$
$$= \langle u, v \rangle . \bar{v}$$

Vector normalizado: si $\|u\| = 1$

Sea $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ un conjunto de vectores ortonormales en un $\underbrace{\text{esp. vect.}}_{\mathbb{V}}$ de $\underbrace{\text{dimensión } n}_{\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ es base de } \mathbb{V}}$ (es decir: $\langle u_k, u_j \rangle = 0$ si $k \neq j$ y $\|u_k\| = \sqrt{\langle u_k, u_k \rangle} = 1$)

Para $v \in \mathbb{V}$:

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle v, u_k \rangle u_k$$

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle \sum_k \langle v, u_k \rangle u_k , \sum_j \langle v, u_j \rangle u_j \rangle$$

$$= \sum_k \sum_j \langle v, u_k \rangle \cdot \overline{\langle v, u_j \rangle} \cdot \langle u_k, u_j \rangle =$$

$$= \sum_k \langle v, u_k \rangle \overline{\langle v, u_k \rangle} = \sum_{k=1}^{n} |\langle v, u_k \rangle|^2$$

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle v, u_k \rangle|^2$$

Ejemplo

$\mathbb{V} = C_{\mathbb{C}}[a,b]$ = funciones continuas de $[a,b] \to \mathbb{C}$.

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot \bar{g}(t)\, dt$ es un producto interno

Veamos: para $f, g, h \in \mathbb{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

i $\langle g, f \rangle = \int_a^b g(t) \cdot \bar{f}(t)\, dt = \int_a^b \overline{\overline{g(t)} \cdot f(t)}\, dt = \overline{\int_a^b \overline{g(t)}\, f(t)\, dt}$

$= \overline{\langle f, g \rangle}$

ii $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) \cdot \bar{h}(t)\, dt =$

$= \alpha \int_a^b f(t) \bar{h}(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t) \cdot \bar{h}(t)\, dt$

$= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$

iii: $\langle f, f\rangle = \int_a^b f(t)\,\overline{f(t)}\,dt = \int_a^b |f(t)|^2\,dt \geq 0$

iv $\langle f, f\rangle = 0 \iff \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0 \iff |f(t)|^2 = 0 \iff f(t) = 0$

$\downarrow$ f es continua en $[a,b]$

<u>Norma</u>: $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)\cdot\bar{f}(t)\,dt}$

<u>Distancia</u>: $\|f-g\| = \sqrt{\int_a^b (f(t)-g(t))\cdot\overline{(f(t)-g(t))}\,dt} =$

$= \sqrt{\int_a^b |f(t)-g(t)|^2\,dt}$

En particular: $\varphi_k(t) = e^{ikt} \in C_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$.

$$\langle \varphi_k, \varphi_j\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\cdot\overline{e^{ijt}}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{e^{i(k-j)t}}{k-j}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & k\neq j \\ 2\pi & k=j \end{cases}$$

$$\langle \varphi_k, \varphi_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k\neq j \\ 2\pi & \text{si } k=j \end{cases}$$

Son funciones ortogonales respecto a ese p.i. (ortogonales en $[-\pi,\pi]$)

y: $\tilde{\varphi}_k = \dfrac{\varphi_k}{\sqrt{2\pi}}$ son funciones normalizadas, ya que

$\langle \tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k\rangle = \left\langle \dfrac{\varphi_k}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{\varphi_k}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\langle \varphi_k, \varphi_k\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1$ ✓

<u>Generalización del p.i en</u> $C_R[a,b]$:

Sea $p(t)$ una función continua, positiva en $[a,b]$:

$\langle f, g\rangle = \int_a^b p(t)\cdot f(t)\cdot\bar{g}(t)\,dt$ es un p.i.

Proyección de una función f sobre $\tilde{\varphi}_k$:

$$\operatorname{proy}_{\tilde{\varphi}_k} f = \langle f, \tilde{\varphi}_k \rangle \cdot \tilde{\varphi}_k = \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

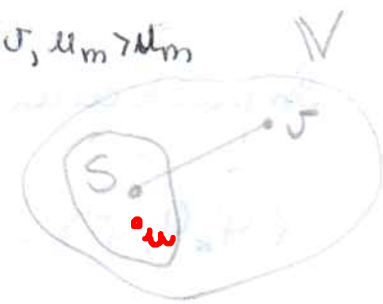
$$= e^{ikt} \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

Proyección ortogonal sobre un subespacio.

Sea $S \subset V$ un subespacio generado por el conjunto ortonormal $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

$$\operatorname{proy}_S v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle v, u_m \rangle u_m$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \langle v, u_k \rangle u_k$$



Aproximación por mínimos cuadrados

El vector de S más cercano a v es $\operatorname{proy}_S v$

qué es más cercano?

↓

logra el mínimo de $\|v - u\|$, $u \in S$

<u>Dem</u>: Sea $c_k = \langle v, u_k \rangle$.

Sea $u \in S$, $u = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k$

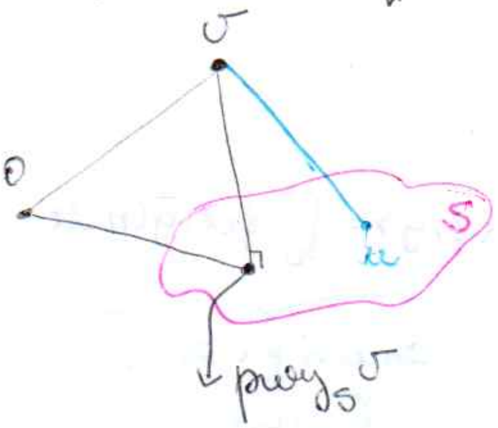
$$\|v - u\|^2 = \langle v - u, v - u \rangle = \langle v - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k , v - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k \rangle =$$

$$= \langle v, v \rangle - \sum_{k=1}^{m} \overline{\lambda}_k \langle v, u_k \rangle - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle u_k, v \rangle + \sum \lambda_k \overline{\lambda}_k$$

$$= \langle v, v \rangle - \sum \overline{\lambda}_k c_k + \lambda_k \overline{c}_k - \lambda_k \overline{\lambda}_k + c_k \overline{c}_k - c_k \overline{c}_k$$

$$= \|v\|^2 + \sum |\lambda_k - c_k|^2 - \sum |c_k|^2$$ → esto es mínimo si $\lambda_k = c_k$

IV



$\|v - u\| \geq \|v - proy_S v\|$ para todo $u \in S$

Error de aproximación (residuo)

$v - proy_S v$ → es ortogonal a $proy_S v$

$$\|error\|^2 = \|v - proy_S v\|^2 = \langle v - \sum \overbrace{\langle v, u_k\rangle}^{c_k} u_k \,,\, v - \sum \overbrace{\langle v, u_k\rangle}^{c_k} u_k \rangle$$

$$= \langle v, v\rangle - \sum \overline{\langle v, u_k\rangle}\langle v, u_k\rangle - \sum \langle v, u_k\rangle \overline{\langle v, u_k\rangle}$$

$$+ \sum_k \sum_j \langle v, u_k\rangle \overline{\langle v, u_j\rangle} \langle u_k, u_j\rangle =$$

$$= \|v\|^2 - \sum_k |c_k|^2 \cdot 2 + \sum |c_k|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 \geq 0$$

Como $\|error\|^2 \geq 0$ Resulta:

$$\|v\|^2 \geq \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 = \|proy_S v\|^2$$

↓ probar esta igualdad!

y si $m \to \infty$?

$$\|v\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

$$\boxed{\|v\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, u_k\rangle|^2}$$

siendo $\{u_1, u_2, \dots\}$ un conj. ortonormal

Desigualdad de Bessel

Ejemplo en $C_R[0,L]$

$\{ \text{sen}(\frac{k\pi t}{L}) \}_{k=1}^{\infty}$ son ortogonales en $[0,L]$.

Es decir, ortogonales c/respecto al p.i. $\underbrace{\langle f,g \rangle = \int_0^L f(t)g(t)\,dt}_{\text{es un p.i en } C_{\mathbb{R}}[0,L]}$

Veamos:

$$\langle \text{sen}(\tfrac{k\pi t}{L}), \text{sen}(j\tfrac{\pi t}{L}) \rangle = \int_0^L \text{sen}(\tfrac{k\pi t}{L})\,\text{sen}(j\tfrac{\pi t}{L})\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \frac{L}{2} & \text{si } k = j \end{cases} \qquad \| \text{sen}(\tfrac{k\pi t}{L}) \|^2 = \frac{L}{2}$$

Entonces: $\varphi_k = \text{sen}(\frac{k\pi t}{L}) \cdot \sqrt{\frac{2}{L}}$

$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal.

Sea $f(x) = x$ en $[0,L]$. ¿Cuál es la mejor aproximación de f por vectores en el espacio generado por $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$?

$$f \approx \sum_{k=1}^{m} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

$$\langle f, \varphi_k \rangle = \int_0^L f(t)\,\text{sen}(\tfrac{k\pi t}{L}) \cdot \sqrt{\tfrac{2}{L}}\,dt = \int_0^L t\,.\,\text{sen}(\tfrac{k\pi t}{L})\sqrt{\tfrac{2}{L}}\,dt$$

$$= \sqrt{\tfrac{2}{L}} \cdot \frac{L^2}{\pi^2 k^2} \cdot (-\pi k(-1)^k) = \sqrt{\tfrac{2}{L}} \cdot \frac{L^2 \cdot (-1)^{k+1}}{\pi k} = C_k$$

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\tfrac{2}{L}}\, \frac{L^2(-1)^{k+1}}{\pi k}\, \text{sen}(\tfrac{k\pi t}{L}) \cdot \sqrt{\tfrac{2}{L}} =$$

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^{m} \frac{2L(-1)^{k+1}}{\pi k}\, \text{sen}(\tfrac{k\pi t}{L})$$

Bessel: $\| f \|^2 = \int_0^L t.t\,dt = \frac{L^3}{3} \geq \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{L} \cdot \frac{L^4}{\pi^2 k^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi^2}{6} \geq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}}$

Nota: si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ son ortogonales en $C_c[a,b]$ (posiblemente no normalizados)

S = subespacio de $C_c[a,b]$ generado por $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$

$$\mathrm{proy}_S f = \left\langle f, \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} \right\rangle \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} + \left\langle f, \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|} \right\rangle \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|} + \cdots$$

$$= \sum_k \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \varphi_k = \sum_k \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \varphi_k$$

$$\mathrm{proy}_S f = \sum_k c_k \varphi_k$$

$$\text{con } c_k = \frac{\int_a^b f(t)\,\overline{\varphi_k}(t)\,dt}{\int_a^b \varphi_k(t)\,\overline{\varphi_k}(t)\,dt}$$

Desigualdad de Bessel en este caso resulta:

$$\boxed{\|f\|^2 \geq \sum_k \frac{|\langle f, \varphi_k \rangle|^2}{\|\varphi_k\|^2}}$$

Dado un conjunto de funciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ortogonales en un espacio de funciones $\mathbb{V}$, respecto al producto interno $\langle , \rangle$

Dado $f \in \mathbb{V}$, los números:

$$\boxed{c_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}}$$ se denominan

coeficientes de Fourier de f respecto al conjunto $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ son ortonormales: $\boxed{c_k = \langle f, \varphi_k \rangle}$

La serie: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t)}$, donde c_k son los coef. de Fourier de f,

se denomina SERIE DE FOURIER de f.

Ejemplo: Sea $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$

Sea el conj ortogonal: $\left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right\}_{k=1}^{\infty}$ en $[0,L]$

los coef de f son: $c_k = \underbrace{\frac{2}{L}}_{\frac{1}{\|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\|^2} = \frac{1}{\langle \operatorname{sen}, \operatorname{sen} \rangle} = \frac{1}{\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx}} \int_0^L \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx =$

$$c_k = \begin{cases} \frac{2k}{\pi} \frac{(1+(-1)^k)}{k^2-9} & \text{si } k \neq 3 \\ 0 & \text{si } k = 3 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{4k}{\pi(k^2-9)} & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo: Considere $\varphi_k = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ en $[-L, L]$.

Son ortogonales: $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(j\frac{\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ L & k = j \end{cases}$

$$\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \|\varphi_k\|^2 = L$$

Sea $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$

$$c_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0$$

$\rightarrow$ $\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ es ortogonal a todas las φ_k

Serie de Fourier de f: $S(x) = 0$

Entonces: En un e.v. V con producto interno, los coeficientes de Fourier de f con respecto a funciones ortogonales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ son aquellos para los cuales la combinación lineal de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ resulta la mejor aproximación por mínimos cuadrados.

Se verifica desigualdad de Bessel:

$$C_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}$$

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{m} C_k^2 \cdot \|\varphi_k\|^2$$

Si $m \to \infty$

$$\|f\|^2 \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|\varphi_k\|^2}_{\text{serie convergente}} \Rightarrow C_k \|\varphi_k\| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Si las funciones son ortonormales:

$$C_k = \langle f, \varphi_k \rangle$$

$$\|f\|^2 \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2}$$

$$\Rightarrow C_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Ejemplo. Sea $\varphi_k(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, ortogonales en $[0, L]$.

Dado $f \in V$: $C_k = \dfrac{\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx}{\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx} = \dfrac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$

$$\|f\|^2 = \int_0^L f^2(x)\, dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \to \boxed{\frac{2}{L} \|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} C_k}$$

(9 bis

En qué espacio de funciones podemos trabajar?

Necesitamos el p.i.

$\boxed{C_{\mathbb{C}}[a,b]}$ → funciones continuas $f:[a,b] \to \mathbb{C}$

$\boxed{L^2_{\mathbb{C}}[a,b]}$ = funciones de cuadrado integrable

$= \{ f:[a,b] \to \mathbb{C}$ tales que $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \}$

$C \subset L_2$

↳ aquí definimos:

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt. \quad ⊛$$

satisface ~~todas~~ la definición de p.i, excepto iv:

$$\langle f,f \rangle = 0 \iff f=0.$$

→ Definimos: $f \equiv g$ en $L^2_{\mathbb{C}}[a,b]$ si $f(t)=g(t)$ para casi todo $t \in [a,b]$.

①: $f(t)=g(t)$ para todo $t \in [a,b]$, excepto en un conjunto de medida nula

Así, $*$ es un pi y $\|f\|^2 = \langle f,f \rangle = \int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt$

$= \int_a^b |f(t)|^2 dt$

⇒ vale todo lo dicho sobre serie de Fourier en $L^2_{\mathbb{C}}[a,b]$.

¿Cuánto se parecen f y su serie de Fourier?

Def.

Un sistema $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ en un e.v. V es COMPLETO en V si para cada $f \in V$, ~~existe~~ y cada $\varepsilon > 0$, existe una combinación lineal $\sum_1^m \lambda_k \varphi_k$ tal que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$$

Teorema: un sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ es completo en V si y sólo si para cada $f \in V$ se verifica

$$\boxed{\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2}$$

↳ IGUALDAD DE PARSEVAL

Convergencia (un tipo de convergencia)

Sea $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ un sistema ortogonal completo en V.

Sea $f \in V$ y sea $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$ su serie de Fourier.

Entonces: $\left\| f - \sum_{k=1}^{m} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| \xrightarrow{m \to \infty} 0$

Se dice que la serie de Fourier converge en norma.

Si $\|f\|^2 = \int_a^b \underbrace{f(t)\,\overline{f(t)}}_{|f(t)|^2}\,dt$, se llama convergencia cuadrática o convergencia en media cuadrática.

y significa:

$$\boxed{\lim_{m \to \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{m} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) \right|^2 dx = 0}$$

¿Qué usaremos frecuentemente?

A) $\ldots, e^{-i2t}, e^{-it}, 1, e^{it}, e^{2it}, \ldots$

$\boxed{\varphi_k(t) = e^{ikt}}$ es un sistema ortogonal completo en $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$.

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt}$$

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$ → serie exponencial de Fourier de f en $[-\pi,\pi)$

Parseval: $\|f\|^2 = \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}$

B) $1, \cos(t), \operatorname{sen}(t), \cos(2t), \operatorname{sen}(2t), \cos(3t), \operatorname{sen}(3t) \ldots$ o: $\{1, \cos(kt), \operatorname{sen}(kt)\}_{k=1}^{\infty}$

es un sistema ortogonal completo en $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi]$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen}(kt)\, dt \end{aligned}}$$

$\|\cos kt\|^2 = \pi \quad k \geq 1$

$\|1\|^2 = 2\pi$

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)$$ → serie trigonométrica de Fourier de f en $[-\pi,\pi]$

Parseval: $\|f\|^2 = \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \pi\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)}$

c) $\{\operatorname{sen}(kt)\}$ → sistema ortogonal completo en $L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$

$$\boxed{b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\operatorname{sen}(kt)\, dt}$$

$\|\operatorname{sen} kt\|^2 = \frac{\pi}{2}$

$$f(t) \sim \sum b_k \operatorname{sen}(kt)$$

D) $\{\cos(kt)\}_{k=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal completo en $L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$

$$\boxed{a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{L} f(t)\cos(kt)\,dt}$$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

En otros intervalos:

(A') $\{e^{ik\frac{\pi}{L}t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ → ortogonal completo en $L^2_{\mathbb{C}}[-L,L]$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,e^{-ik\frac{\pi t}{L}}\,dt}$$

Parseval: $\displaystyle\int_{-L}^{L} |f(t)|^2\,dt = 2L\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2$

(B') $\{1, \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\}_{k=1}^{\infty}$ ortogonal completo en $L^2_{\mathbb{R}}[-L,L]$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)dt \\[2ex] b_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{L}\right)dt \end{array}}$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$k = 1, 2, 3, \dots$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{L}\right)$$ → serie trigonométrica de Fourier de f en $[-L,L]$

(C') $\{\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\}_{k=1}^{\infty}$

(D') $\{\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\}_{k=0}^{\infty}$

→ ortogonales completos en $[0,L]$

$$\boxed{b_k = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{L}\right)dt}$$

$$\boxed{a_k = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(t)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)dt}$$